Varianta 55

Subiectul I.

a) Punctul M aparține planului din enunț.

b) $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 150^\circ$.

c) $M(2,1)$.

d) Există 4 puncte de intersecție.

e) Două soluții.

f) $a \in \{0,1\}$

Subiectul II.

1.

a) $1+3+5+...+49=625$.

b) $1+C_3^2+C_4^2+C_5^2=20$.

c) $x=1$.

d) $x=4$.

e) Se folosește definiția funcției injective.

2.

a) $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, pentru $x>-1$.

b) $x=0$ este punctul de minim local (şi global) al funcției f.

c) $d: x=-1$ este singura asimptotă verticală (la dreapta) a funcției.

d) $\int_0^2 f(x)\,dx = = \ln 3$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Subiectul III.

a) $B^2=\hat{4}\cdot I_2 \Rightarrow B^4=I_2$.

b) $\det(A(\hat{a}))=\hat{0} \Leftrightarrow \hat{a}\in\{\hat{2},\hat{3}\}$.

c) Evident.

d) Evident.

e) Pentru $\hat{a}\in \mathbf{Z}_5$, avem $(A(\hat{a}))^5=(\hat{a}\cdot I_2+B)^5$ şi deoarece matricele I_2 şi B comută, folosind punctul **d)**, avem:

$(A(\hat{a}))^5=\hat{a}^5\cdot I_2+B^5 \overset{c)}{=} \hat{a}\cdot I_2+B^4\cdot B \overset{a)}{=} \hat{a}\cdot I_2+B=A(\hat{a})$.

f) Dacă $X\in M$, din punctul **e)**, avem că $X^5=X$ şi prin inducție se deduce că

pentru orice $k \in \mathbf{N}$, $X^{5^k} = X$.
Obținem că toate cele 5 elemente ale mulțimii M sunt soluții ale ecuației.

g) Presupunem că există $X = \begin{pmatrix} x & 2007 \\ 2007 & x \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z})$, astfel încât $X^5 - X = I_2$.

Matricea $A(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{x} \end{pmatrix}$ este o soluție a ecuației $X^5 - X = I_2$ în mulțimea $M_2(\mathbf{Z}_5)$.

$A^5(\hat{x}) - A(\hat{x}) = I_2 \overset{\text{e)}}{\Leftrightarrow} A(\hat{x}) - A(\hat{x}) = I_2 \Leftrightarrow 0_2 = I_2$ în mulțimea $M_2(\mathbf{Z}_5)$, fals.

Subiectul IV.

a) $\forall x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = f(x) > 0$.

b) Pentru orice $x > 0$, F este o funcție Rolle pe intervalul $[0, x]$.
Aplicând teorema lui Lagrange funcției F pe intervalul $[0, x]$, deducem că există $c_x \in (0, x)$ astfel încât $\dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(c_x) \overset{F(0)=0}{\Leftrightarrow} F(x) = x \cdot f(c_x)$.

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{F(x)}{x} = 1$.

d) Pentru $x > 0$, avem $F(x) = x \cdot f(c_x) \geq x \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = +\infty$

Pentru $x < 0$, din teorema lui Lagrange rezultă că există $d_x \in (x, 0)$ astfel încât

$F(x) = x \cdot f(d_x) \overset{x<0}{\leq} x \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$.

e) Din punctul **a)**, deoarece $\forall x \in \mathbf{R}$, $F'(x) > 0$, rezultă că F este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$, deci F este injectivă.
Din punctul **d)** rezultă că $Im\, F = \mathbf{R}$, deci F este surjectivă.
În concluzie, funcția F este bijectivă.

f) Pentru $x > 0$, avem $F(x) \geq x$, deci

$x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} F\left(\dfrac{1}{k}\right) \geq 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n + \ln n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $\Leftrightarrow x_n \geq c_n + \ln n$ şi trecând la limită în relația anterioară, obținem că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

g) Pentru $x > 0$, avem $F(x) = x \cdot f(c_x) \in [x, e \cdot x]$.

$\forall \alpha > 0$, $0 < \dfrac{x_n}{n^\alpha} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} F\left(\dfrac{1}{k}\right)}{n^\alpha} \leq \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} e \cdot \dfrac{1}{k}}{n^\alpha} = \dfrac{e \cdot (c_n + \ln n)}{n^\alpha} = e \cdot \dfrac{c_n}{n^\alpha} + \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$, de unde deducem concluzia.